Karlsruhe Institute of Technology

Entscheidungsverfahren mit Anwendungen in der Softwareverifikation

Lineare ganzzahlige Arithmetik

Dr. Stephan Falke
Dr. Carsten Sinz

Institut für Theoretische Informatik

27.05.2013

Theorie der linearen ganzzahligen Arithmetik

- **LIA: *Linear Integer Arithmetic***
- **Signatur:**
  $\sum = \{ =, >, \geq, +, -, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$
- **Beispiele:**
  1. $8x + 6y \leq 0$
  2. $4y \geq 1$
  3. $3x + 3y = 2$
- **Beobachtungen:**
  1. Kann vereinfacht werden: $4x + 3y \leq 0$
  2. Kann verschärft werden: $y \geq \lceil 1/4 \rceil = 1$
  3. Keine ganzzahlige Lösung

Syntax

- Boolesche Kombination von linearen Gleichungen und Ungleichungen
- Darstellung:
  - Lineare Gleichungen: $$E = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} x_i = c_j \right\}_{1 \leq j \leq m}$$
  - Lineare Ungleichungen: $$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} x_i \leq d_j \right\}_{1 \leq j \leq m'}$$

- **Entwicklung eines Entscheidungsverfahrens in mehreren Schritten:**
  1. Konjunktion von Gleichungen
  2. Konjunktion von Gleichungen und Ungleichungen
  3. Beliebige Boolsche Kombinationen von Gleichungen und Ungleichungen

Lineare Gleichungen

- **Eingabe:** Menge von Gleichungen der Form $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c$
- **Ausgabe:** Gleichungssystem in gelöster Form (x_i = ..., „Dreiecksform“) oder Ausgabe „unerfüllbar“
- **Vorverarbeitung (für alle Gleichungen):**
  - **Erfüllbarkeitstest:** Falls $\mathrm{ggT}(\{a_i\}_{1 \le i \le n}) \nmid c$, gib aus „unerfüllbar“
  - **Normalisieren:** Teile alle a_i und c durch ggT($\{a_i\}_{1 \le i \le n}$)
- **Beispiele:**

$$12x + 15y = 7$$

Erfüllbarkeitstest: ggT($\{a_i\}$) = 3, $3 \nmid 7$, also Gleichung nicht erfüllbar

$$24x + 12y + 10z = 4$$

Erfüllbarkeitstest: ggT($\{a_i\}$) = 2, $2 \mid 4$, also Gleichung erfüllbar

Normalisieren: $12x + 6y + 5z = 2$

Lineare Gleichungen (II)

- Weiteres Vorgehen:
  Eliminiere Gleichungen schrittweise durch Auflösen nach x_i
- Falls es eine Gleichung gibt mit $|a_k| = 1$, löse diese Gleichung nach x_k auf und ersetze x_k in allen anderen Gleichungen
- Falls es kein solches a_k gibt, wähle eine Gleichung E und ein a_k mit ***kleinstem Betrag*** und mache a_k bei Bedarf positiv (durch Multiplikation der Gleichung mit -1)
- Definiere:
  - a mod' $b := a - b \lfloor a/b + 1/2 \rfloor$
  - Setze $m := a_k + 1$
  - Damit gilt: a_k mod' $m = -1$
- Erzeuge neue Variable σ und füge neue Gleichung hinzu:

$$m\sigma = \sum_i (a_i \bmod' m) \cdot x_i - (c \bmod' m)$$

Lineare Gleichungen (III)

- Löse die Gleichung $m\sigma = \sum_i (a_i \bmod' m) \cdot x_i - (c \bmod' m)$ nach x_k auf (beachte: a_k mod' m = -1):

$$m\sigma = -x_k + \sum_{i \neq k} (a_i \bmod' m) \cdot x_i - (c \bmod' m)$$

$$x_k = -m\sigma + \sum_{i \neq k} (a_i \bmod' m) \cdot x_i - (c \bmod' m)$$

- Ersetze nun dieses x_k in allen Gleichungen
- Aus der ursprünglichen Gleichung E: $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c$ (ang. $a_k > 0$) wird damit:

$$a_k x_k + \sum_{i \neq k} a_i x_i = c$$

$$-a_k m\sigma + a_k \sum_{i \neq k} (a_i \bmod' m) \cdot x_i - a_k (c \bmod' m) + \sum_{i \neq k} a_i x_i = c$$

$$-a_k m\sigma + \sum_{i \neq k} (a_i + a_k (a_i \bmod' m)) \cdot x_i = c + a_k (c \bmod' m)$$

$$-a_k \sigma + \sum_{i \neq k} (\lfloor a_i/m + \frac{1}{2} \rfloor + (a_i \bmod' m)) \cdot x_i = \lfloor c/m + \frac{1}{2} \rfloor + (c \bmod' m)$$

Lineare Gleichungen (IV)

- Was haben wir gewonnen?
  - x_k eliminiert, aber neue Variable σ
  - Koeffizienten in neuer Gleichung E' kleiner
- Beispiel: $7x + 12y + 31z = 17$
  $3x + 5y + 14z = 7$
- Eliminierung:
  1. x in Gleichung 1: $x = -8\alpha - 4y - z - 1$ (neue Variable α)
     neue Gleichungen: $\{ -7\alpha - 2y + 3z = 3,\ -24\alpha - 7y + 11z = 10 \}$
  2. y in neuer Gleichung 1: $y = \alpha + 3\beta$ (neue Variable β)
     neue Gleichungen: $\{ -3\alpha - 2\beta + z = 1, -31\alpha - 21\beta + 11z = 10\}$
  3. z in neuer Gleichung 1: $z = 3\alpha + 2\beta + 1$ (keine neue Variable)
     neue Gleichungen: $\{ 2\alpha + \beta = -1 \}$
  4. Direktes Lösen der letzten Gleichung: $\{ \beta = -2\alpha - 1 \}$
- Rücksubstitution liefert Lösung: (α bel. gewählt, z.B. $\alpha = 0$):
  - $\beta = -1,\ z = -1, y = -3, x = 12y$

Gleichungen und Ungleichungen

- **Erster Schritt:** Eliminiere Gleichungen (ersetze dabei Variablen auch in Ungleichungen)

  ➜ Reines System von Ungleichungen

- Verwende **Omega-Test** (Variante von Fourier-Motzkin-Elimination für ganze Zahlen)
  - Fourier-Motzkin:
    - entdeckt 1826 durch Fourier, wiederentdeckt 1936 durch Motzkin
    - löst Ungleichungen über rationalen Zahlen
  - Grundlegende Idee: selektiere Variable und eliminiere diese; wiederhole dies, bis nur noch eine Variable verbleibt

Fourier-Motzkin

- Basis-Idee:
  - Wähle zu eliminierende Variable aus: x_k
  - Schreibe Ungleichungen so um, dass sie obere und untere Schranken für x_k ausdrücken:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq c \quad \rightarrow \quad a_k x_k \leq c - \sum_{i \neq k}^{n} a_i x_i$$

    - Falls $a_k > 0$: obere Schranke, ansonsten untere Schranke
    - Eliminiere x_k
- **Beispiele:** Angenommen, wir wollen x eliminieren. Handelt es sich um obere oder untere Schranken?

$$x - y \leq 0$$
$$x - z \leq 0$$
$$-x + y + 2z \leq 0$$
$$-z \leq -1$$

Fourier-Motzkin

- Elimination von x_k:
  - Wähle sämtliche Gleichungen aus, die obere/untere Schranken für x_k liefern:

$$\beta_l := c - \sum_{i \neq k}^{n} a_i x_i \leq a_k x_k \qquad a'_k x_k \leq c' - \sum_{i \neq k}^{n} a'_i x_i := \beta_u$$

    (für $a_k > 0$)
  - Für jedes Paar von oberer/unterer Schranke haben wir:

$$\frac{\beta_l}{a_k} \leq x_k \leq \frac{\beta_u}{a'_k}$$

  - Dieses Ungleichungspaar besitzt genau dann eine rationale Lösung, falls

$$\frac{\beta_l}{a_k} \leq \frac{\beta_u}{a'_k}$$

  - Füge all diese Ungleichung hinzu

Fourier-Motzkin: Beispiel

- Gegeben:

  (1) $x - y \leq 0$ obere Schranke für x
  (2) $x - z \leq 0$ obere Schranke für x
  (3) $-x + y + 2z \leq 0$ untere Schranke für x
  (4) $-z \leq -1$

- Eliminiere x:
  - Aus Paar (1)-(3): $y + 2z \leq x \leq y$ ➜ $y + 2z \leq y$ ➜ $2z \leq 0$ (5)
  - Aus Paar (2)-(3): $y + 2z \leq x \leq z$ ➜ $y + 2z \leq z$ ➜ $y + z \leq 0$ (6)
  - (1), (2), (3) können nun gestrichen werden
- Eliminiere z:
  - (4) untere Schranke, (5), (6) obere Schranken
  - Aus Paar (4)-(5): $1 \leq z \leq 0$ ➜ $1 \leq 0$
  - **Widerspruch!**

Von Fourier-Motzkin zum Omega-Test

- Fourier-Motzkin: rationale Lösungen
- Omega-Test: ganzzahlige Lösungen
- Idee des Omega-Tests:
  - Berechne zuerst Lösungen für die „rationale / reelle Relaxation“ des ganzzahligen Problems („**real shadow**“):

$$\beta_l \leq a_k x_k \qquad a'_k x_k \leq \beta_u \quad \rightarrow \quad \beta_l a'_k \leq a_k a'_k x_k \leq \beta_u a_k \quad \rightarrow \quad \beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$$

  - Wenn $\beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$ keine Lösung besitzt, wissen wir, dass das Problem unerfüllbar ist
  - Wenn $\beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$ eine ganzzahlige Lösung besitzt, so kann es trotzdem sein, dass das Ursprungsproblem keine Lösung hat. (Warum?)

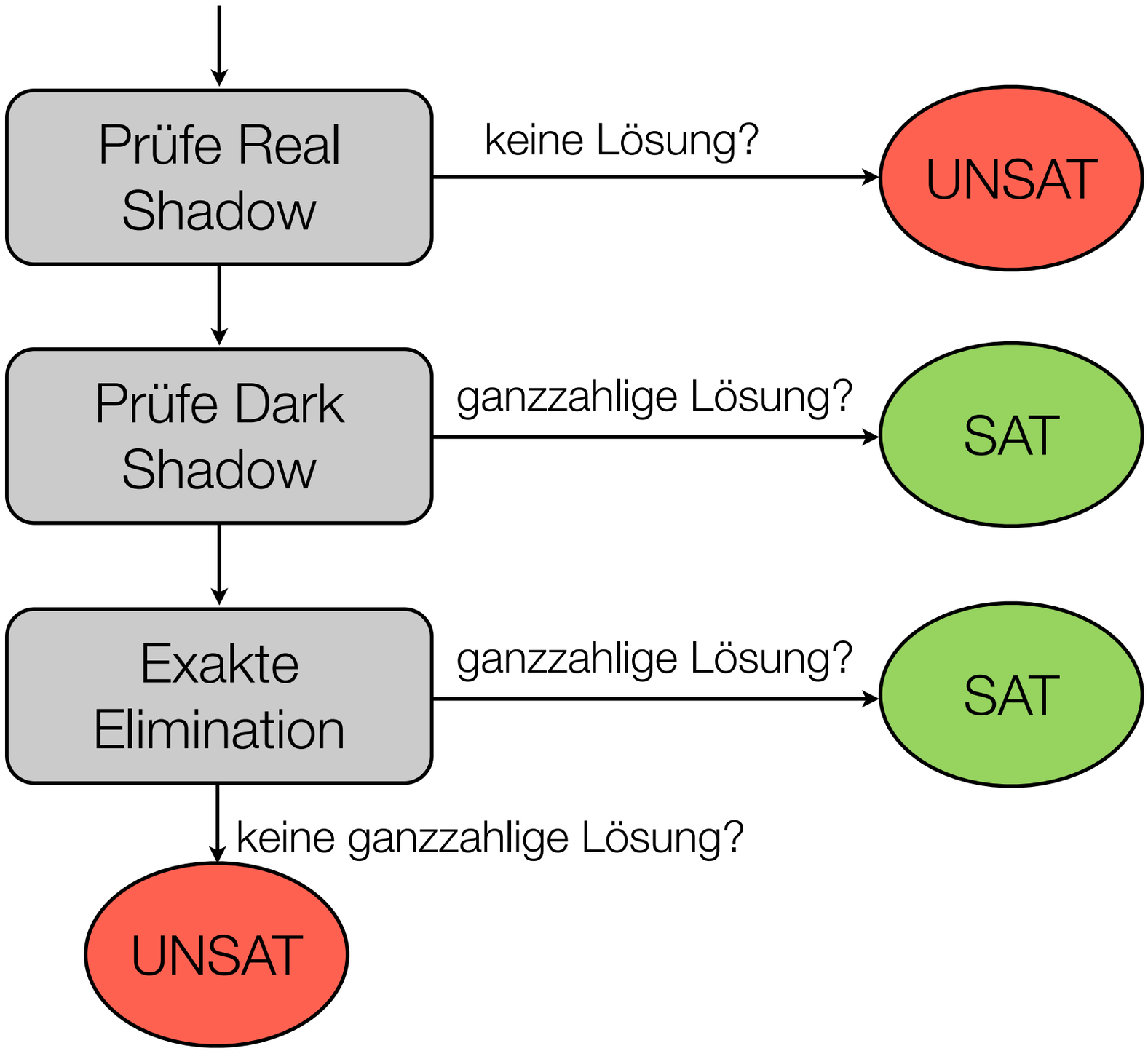
Omega-Test: Dark Shadow

- Es kann sein, dass es eine ganzzahlige Lösung für $\beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$ gibt, nicht aber für $\beta_l a'_k \leq a_k a'_k x_k \leq \beta_u a_k$.
  - Kein Vielfaches von $a_k a'_k$ ist zwischen $\beta_l a_k$ und $\beta_u a_k$.
- Prüfe nun die folgende Ungleichung („dark shadow“):

$$\beta_u a_k - \beta_l a'_k \geq (a_k - 1)(a'_k - 1)$$

- Falls diese eine Lösung besitzt, so wissen wir, dass auch das Ursprungsproblem eine Lösung hat
- Falls nicht, muss eine exakte Elimination durchgeführt werden
  - Wähle den größten Koeffizienten a'_k für x_k in einer oberen Schranke
  - Prüfe für alle $0 \leq i \leq (a_k a'_k - a_k - a'_k)/a'_k$, ob eine Lösung existiert mit der zusätzlichen Bedingung $a_k x_k = \beta_l + i$.

Übersicht Omega-Test



Omega-Test: Beispiel

- Betrachte das folgende System *P* von Ungleichungen in LIA:

$$\begin{aligned} 3 &\leq 11x + 13y \leq 21 \\ -8 &\leq 7x - 9y \leq 6 \end{aligned}$$

- Keine Gleichungen, daher Start der Fourier-Motzkin-Elimination.
- Wir wollen zuerst x eliminieren:

$$\begin{aligned} 3 - 13y &\leq 11x \leq 21 - 13y \quad ① \\ -8 + 9y &\leq 7x \leq 6 + 9y \quad ② \end{aligned}$$

- „**Real shadow**“: $\beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$ für Ungleichungspaar $\beta_l a'_k \leq a_k a'_k x_k \leq \beta_u a_k$
  - Paar 1 (①-①): β_l = 3-13y, β_u = 21-13y, $a_k = a'_k = 11$:
    ➔ (3-13y)·11 ≤ (21-13y)·11
    ➔ 33 ≤ 231 ✔
  - Paar 2: (①-②): β_l = 3-13y, β_u = 6+9y, a_k = 11, a'_k = 7:
    ➔ (3-13y)·7 ≤ (6+9y)·11
    ➔ 21-91y ≤ 66+99y ➔ 0 ≤ 45+190y

Omega-Test: Beispiel

- „**Real shadow**“: $\beta_l a'_k \leq \beta_u a_k$ für Ungleichungspaar $\beta_l a'_k \leq a_k a'_k x_k \leq \beta_u a_k$
  - Paar 3: 98 ≥ 0 ✔
  - Paar 4: 235 ≥ 190y
- Insgesamt: Neues System nach Eliminierung von x:

  -45 ≤ 190y ≤ 235
- Besitzt dieses ganzzahlige Lösungen: **ja!** (y = 0 oder y = 1)

  ➔ Prüfung des **real shadow** liefert also kein verwertbares Ergebnis!

  ➔ Jetzt Prüfung des **dark shadow**!
- „**Dark shadow**“ wird geprüft anhand der Gleichung $\beta_u a_k - \beta_l a'_k \geq (a_k - 1)(a'_k - 1)$
  - Paar 1 (①-①): β_l = 3-13y, β_u = 21-13y, $a_k = a'_k = 11$:
    ➔ (21-13y)·11 - (3-13y) ·11 ≥ 100
    ➔ 231-143y-33+143y ≥ 100 ➔ 198 ≥ 100 ✔

Omega-Test: Beispiel

- Generierung der 3 weiteren Paare liefert für den **dark shadow**:

  $15 \leq 190y \leq 175$

- Dieses System besitzt **keine** ganzzahlige Lösung!
- **Also**: Exakte Elimination erforderlich!
  - Wir müssen für jede untere Schranke prüfen, ob $P \cup \{ a_k x_k = \beta_l + i \}$ eine ganzzahlige Lösung besitzt für $0 \leq i \leq (a_k a'_k - a_k - a'_k)/a'_k$ mit $a'_k = 11$.

    1. $\beta_l = 3\text{-}13y$, $a_k = 11$: zusätzliche Gleichung: $P_i = \{ 11x = 3\text{-}13y+i \}$ mit
       $0 \leq i \leq (11 \cdot 11\text{-}22)/11 = 9$
       Für kein i mit $0 \leq i \leq 9$ besitzt $P \cup P_i$ eine ganzzahlige Lösung.

    2. $\beta_l = -8+9y$, $a_k = 7$: zusätzliche Gleichung: $P_i = \{ 7x = -8+9y+i \}$ mit
       $0 \leq i \leq \lfloor (7 \cdot 11\text{-}7\text{-}11)/11 \rfloor = 5$

       Für kein i mit $0 \leq i \leq 5$ besitzt $P \cup P_i$ eine ganzzahlige Lösung.

➔ Das Ungleichungssystem P besitzt keine ganzzahlige Lösung!