Karlsruhe Institute of Technology

Entscheidungsverfahren mit Anwendungen in der Softwareverifikation

VI: SMT, DPLL(T)

Carsten Sinz
Institut für Theoretische Informatik

26.11.2019

Inhalt

- Theorien
- SMT-LIB
- DPLL(T): Idee
- Abstraktes DPLL(T)

SMT

- **Wunsch:** Logik, die Arithmetik beherrscht
- n-Damen Problem benötigt dann (fast) keine weitere Kodierung
  - $X_{i,j} = 0 \vee X_{i,j} = 1$ für alle $X_{i,j}$
- **Wunsch:** Unterstützung weiterer eingebauter Datentypen
- **Lösung:** Benutze SMT! (Satisfiability Modulo Theories)
- **Beobachtung:** SMT ist wie Haskell / OCaml / Scala / Swift / …

Theorien 1

Definition: Eine Theorie T besteht aus

- einer **Signatur** Σ bestehend aus Konstanten-, Funktions- und Prädikatensymbolen
- einer Menge Ax von **Axiomen** (Sätze der Prädikatenlogik)

- Die Symbole in Σ haben **keine** festgelegte Bedeutung
- Die Bedeutung wird erst durch Ax festgelegt

Theorie der Uninterpretierten Funktionen

- **Beispiel (T_{UF}):**
  - $\Sigma = \{ =, a, b, c, \ldots, f, g, h, \ldots \}$
  - Axiome Ax:
    1. $\forall x \,.\, x = x$ (Reflexivität)
    2. $\forall x, y \,.\, x = y \rightarrow y = x$ (Symmetrie)
    3. $\forall x, y, z \,.\, x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ (Transitivität)
    4. Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \Sigma$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \,.\, \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

(Kongruenz)

- (**Kongruenz**) ist ein **Axiomenschema**, das eine (auch unendliche) Menge von Axiomen repräsentiert

Arithmetische Theorien 1

- **Beispiel (Peano Arithmetik):**
  - $\Sigma = \{ =, 0, 1, +, * \}$
  - Axiome Ax:
    1. Axiome der Theorie der uninterpretierten Funktionen
    2. $\forall x \;.\; \neg(x + 1 = 0)$ **(Null)**
    3. $\forall x, y \;.\; x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$ **(Nachfolger)**
    4. $F[0] \wedge (\forall x \;.\; F[x] \rightarrow F[x + 1]) \rightarrow \forall x \;.\; F[x]$ **(Induktion)**
    5. $\forall x \;.\; x + 0 = x$ **(Plus Null)**
    6. $\forall x, y \;.\; x + (y + 1) = (x + y) + 1$ **(Plus Nachfolger)**
    7. $\forall x \;.\; x * 0 = 0$ **(Multiplikation Null)**
    8. $\forall x, y \;.\; x * (y + 1) = (x * y) + x$ **(Multiplikation Nachfolger)**
  - (**Induktion**) ist ein (unendliches) Axiomenschema

Arithmetische Theorien 2

- **Beispiel (Presburger Arithmetik):**
  - $\Sigma = \{ =, 0, 1, + \}$ (keine Multiplikation!)
  - Axiome Ax:
    1. Axiome der Theorie der uninterpretierten Funktionen
    2. $\forall x \;.\; \neg(x + 1 = 0)$ **(Null)**
    3. $\forall x, y \;.\; x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$ **(Nachfolger)**
    4. $F[0] \wedge (\forall x \;.\; F[x] \rightarrow F[x + 1]) \rightarrow \forall x \;.\; F[x]$ **(Induktion)**
    5. $\forall x \;.\; x + 0 = x$ **(Plus Null)**
    6. $\forall x, y \;.\; x + (y + 1) = (x + y) + 1$ **(Plus Nachfolger)**

  - (**Induktion**) ist ein (unendliches) Axiomenschema
  - In der Presburger Arithmetik sind Konzepte wie Teilbarkeit oder Primzahlen nicht formalisierter; ansonsten ähnlich der Peano-Arithmetik

Arithmetische Theorien 3

- **Beispiel (Lineare Arithmetik der ganzen Zahlen):**
  - $\Sigma = \{ =, >, +, -, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$ (keine Multiplikation!)
  - Axiome Ax:
    1. Axiome der Theorie der uninterpretierten Funktionen
    2. Weitere Axiome ähnlich Presburger Arithmetik

Theorie der Arrays

- **Beispiel (T_A):**
  - Σ = { =, read, write }
  - Axiome Ax:
    1. (**Reflexivität**), (**Symmetrie**), (**Transitivität**) wie in der Theorie der uninterpretierten Funktionen
    2. $\forall a, i, j \;.\; i = j \rightarrow \text{read}(a, i) = \text{read}(a, j)$ **(Array Kongruenz)**
    3. $\forall a, v, i, j \;.\; i = j \rightarrow \text{read}(\text{write}(a, i, v), j) = v$ **(Read-Over-Write 1)**
    4. $\forall a, v, i, j \;.\; i \neq j \rightarrow \text{read}(\text{write}(a, i, v), j) = \text{read}(a, j)$ **(Read-Over-Write 2)**
    5. $\forall a, b \;.\; a = b \leftrightarrow (\forall i \;.\; \text{read}(a, i) = \text{read}(b, i))$ **(Extensionalität)**

Theorien 2

- **Definition (T-erfüllbar):**
  Eine Σ-Formel F ist *T-erfüllbar* gdw. Ax ∪ { F } erfüllbar ist.

- **Definition (T-gültig):**
  Eine Σ-Formel F ist *T-gültig* gdw. Ax ⊨ F.

- **Definition (Entscheidbarkeit):**
  Eine Theorie T ist *entscheidbar* gdw. die T-Erfüllbarkeit für jede Σ-Formel entschieden werden kann.

- **Definition (Fragment):**
  Ein Fragment einer Theorie T ist eine syntaktisch eingeschränkte Teilmenge aller Σ-Formeln.

  - **Beispiel:** quantorenfreies Fragment (QFF)

Theorien 3

- **Definition (Fragment):**
  Ein Fragment einer Theorie T ist eine syntaktisch eingeschränkte Teilmenge aller Σ-Formeln.
  - **Beispiel:** quantorenfreies Fragment (QFF)

- **Definition (Entscheidbarkeit Fragment):**
  Ein Fragment einer Theorie T ist entscheidbar gdw. die T-Erfüllbarkeit für jede Σ-Formel des Fragments entschieden werden kann.

Entscheidbarkeit Beispiele

Theorie	Entscheidbar?	QFF entscheidbar?
Uninterpretierte Funktionen	✖	✔
Peano Arithmetik	✖	✖
Presburger Arithmetik	✔	✔
Lineare Arithmetik ganzer Zahlen	✔	✔
Arrays	✖	✔

DPLL(T): Idee

- Im folgenden: nur quantoren-freie Σ-Formeln
- Benutze DPLL um **Konjunktionen von T-Literalen** zu erzeugen
  - diese T-Literale erfüllen das **Boolesche Skelett** der Formel
- Prüfe, ob die Konjunktion **konsistent** in T ist
  - Falls ja, extrahiere ein T-Modell
  - Falls nein, **schließe** diesen **„Kandidaten“ aus**

DPLL(T): Beispiel

Lineare Arithmetik ganzer Zahlen:

$$y \geq 1 \wedge (x < 0 \vee y < 1) \wedge (x \geq 0 \vee y < 0)$$

Boolesches Skelett:

$$A \wedge (B \vee C) \wedge (D \vee E)$$

Modell für das Boolesche Skelett:

$$A,\ C,\ E$$

Entsprechende T-Literale:

$$y \geq 1,\ y < 1,\ y < 0$$

Inkonsistente Konjunktion von T-Literalen:

$$y \geq 1 \wedge y < 1 \wedge y < 0$$

Schließe diesen “Kandidaten” aus:

$$\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 1)$$

DPLL(T): Beispiel

Lineare Arithmetik ganzer Zahlen:

$$y \geq 1 \wedge (x < 0 \vee y < 1) \wedge (x \geq 0 \vee y < 0) \wedge [\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 1)]$$

Boolesches Skelett:

$$A \wedge (B \vee C) \wedge (D \vee E) \wedge (\neg A \vee \neg C)$$

Modell für das Boolesche Skelett:

$$A,\ \neg C,\ B,\ D$$

Entsprechende T-Literale:

$$y \geq 1,\ \neg(y < 1),\ x < 0,\ x \geq 0$$

Inkonsistente Konjunktion von T-Literalen:

$$y \geq 1 \wedge \neg(y < 1) \wedge x < 0 \wedge x \geq 0$$

Schließe diesen “Kandidaten” aus:

$$\neg(x < 0) \vee \neg(x \geq 0)$$

DPLL(T): Beispiel

Lineare Arithmetik ganzer Zahlen:

$$y \geq 1 \wedge (x < 0 \vee y < 1) \wedge (x \geq 0 \vee y < 0) \wedge [\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 1)] \wedge [\neg(x < 0) \vee \neg(x \geq 0)]$$

Boolesches Skelett:

$$A \wedge (B \vee C) \wedge (D \vee E) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg D)$$

Modell für das Boolesche Skelett:

$$A,\ \neg C,\ B,\ \neg D,\ E$$

Entsprechende T-Literale:

$$y \geq 1,\ \neg(y < 1),\ x < 0,\ \neg(x \geq 0),\ y < 0$$

Inkonsistente Konjunktion von T-Literalen:

$$y \geq 1 \wedge \neg(y < 1) \wedge x < 0 \wedge \neg(x \geq 0) \wedge y < 0$$

Schließe diesen “Kandidaten” aus:

$$\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 0)$$

DPLL(T): Beispiel

Lineare Arithmetik ganzer Zahlen:

$$y \geq 1 \wedge (x < 0 \vee y < 1) \wedge (x \geq 0 \vee y < 0) \wedge [\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 1)] \wedge [\neg(x < 0) \vee \neg(x \geq 0)] \wedge [\neg(y \geq 1) \vee \neg(y < 0)]$$

Boolesches Skelett:

$$A \wedge (B \vee C) \wedge (D \vee E) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg E)$$

Boolesches Skelett hat kein Modell

$\Longrightarrow$ Ursprüngliche Formel hat kein T-Modell

Abstraktes DPLL(T)

- Erweiterung von abstraktem DPLL
- **Parametrisiert** durch eine Theorie T
- Benötigt einen T-Solver, der die **Konsistenz** einer Konjunktion von T-Literalen entscheiden kann
- **Zustände:**
  - `Fail`
  - M ‖ F
    - F: Quantorenfreie Σ-Formel in CNF
    - M: Liste von T-Literalen
  - Konsistenz von M wird durch T-Solver überprüft
- **Regeln:**
  - $M \,\|\, F \implies_T M' \,\|\, F'$ oder $M \,\|\, F \implies_T$ `Fail`

Inferenzregeln 1 (aus DPLL)

- **UnitPropagate:**

$$M \parallel F, C \vee l \implies_T Ml \parallel F, C \vee l \quad \text{falls} \begin{cases} M \models \neg C \\ l \text{ undefiniert in } M \end{cases}$$

- **Decide:**

$$M \parallel F \implies_T Ml^d \parallel F \quad \text{falls} \begin{cases} l \text{ oder } \neg l \text{ kommt in } F \text{ vor} \\ l \text{ undefiniert in } M \end{cases}$$

Inferenzregeln 2 (aus DPLL)

- **Backtrack:**

$$Ml^d N \parallel F, C \implies_T M\neg l \parallel F, C \quad \text{falls} \begin{cases} Ml^d N \models \neg C \\ N \text{ enthält kein Literal} \\ \text{der Form } k^d \end{cases}$$

- **Fail:**

$$M \parallel F, C \implies_T \textsf{Fail} \quad \text{falls} \begin{cases} M \models \neg C \\ M \text{ enthält kein Literal der Form } l^d \end{cases}$$

Inferenzregeln 3 (neu!)

- **Theory-Inconsistent:**

$$M \parallel F \implies_T \varnothing \parallel F, \neg l_1 \vee \ldots \vee l_n \quad \text{falls} \begin{cases} \{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq M \\ \neg l_1 \vee \ldots \vee \neg l_n \text{ T-gültig} \end{cases}$$

- **Theory-Propagate:**

$$M \parallel F \implies_T Ml \parallel F \quad \text{falls} \begin{cases} M \models_T l \\ l \text{ oder } \neg l \text{ kommt in } F \text{ vor} \\ l \text{ undefiniert in } M \end{cases}$$

Eigenschaften

- **Satz:**
  Alle Ableitungen $\varnothing \parallel F \Longrightarrow_T S_1 \Longrightarrow_T \ldots$ sind endlich.

- **Satz:**
  Sei $\varnothing \parallel F \Longrightarrow_T S_1 \Longrightarrow_T \ldots \Longrightarrow_T S$ eine maximale Ableitung. Dann gilt:
  - F ist unerfüllbar gdw. s = `Fail`
  - Falls S die Form M ∥ F hat, dann hat M ein T-Modell und jedes T-Modell von M ist auch ein T-Modell von F

Stand & Ausblick

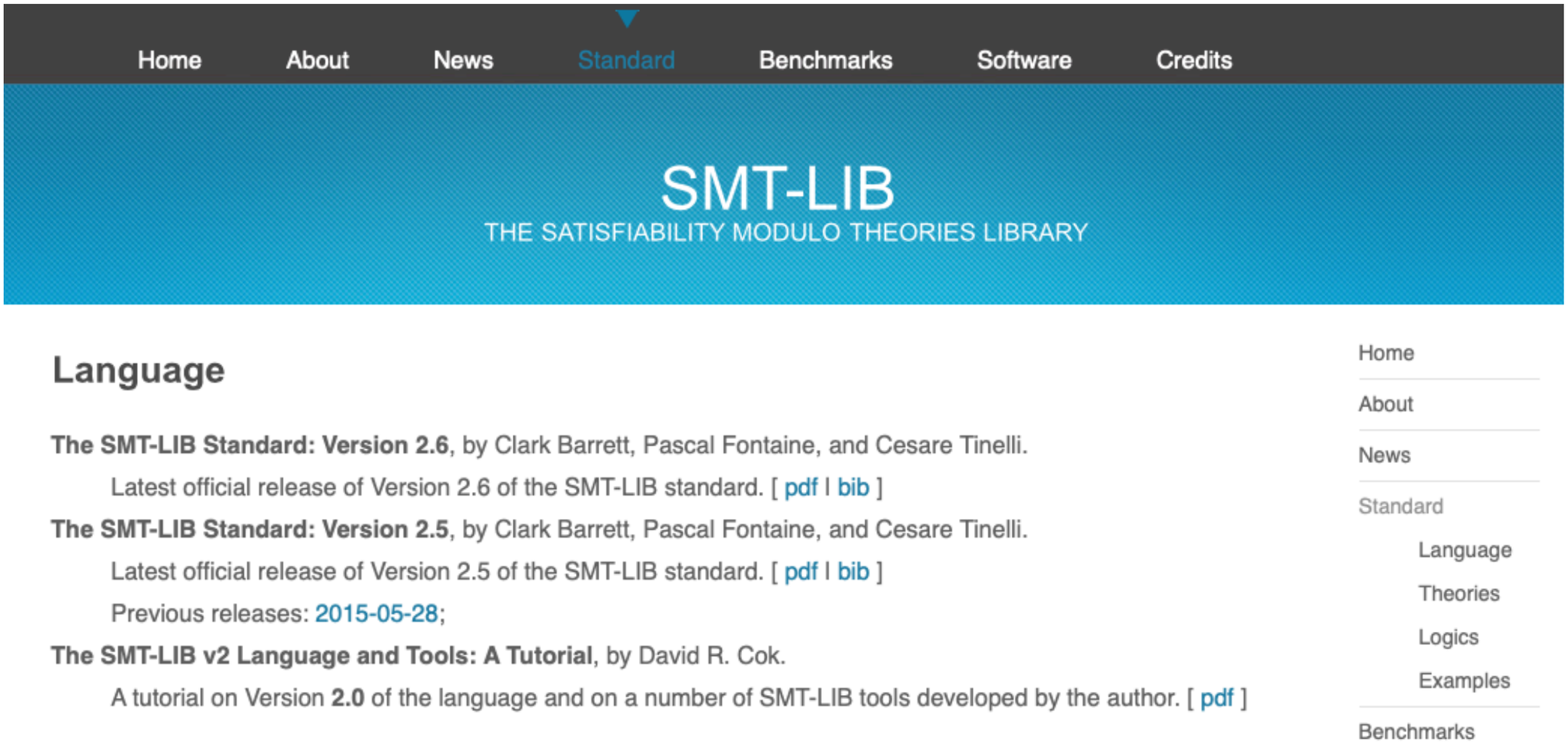
- Bereits gesehen:
  - T-Solver für lineare Arithmetik ganzer Zahlen
- In den nächsten Vorlesungsstunden: T-Solver für
  - Uninterpretierte Funktionen
  - Bit-Vektoren
  - Arrays
- Kombination von T-Solvern

SMT-LIB Grundlagen

- **Mehrsortige Logik (many-sorted logic)**
  - Es gibt eine Menge S = { T_1, T_2, … } von (disjunkten) Sorten („Datentypen“, Wertebereiche)
    - z.B. `Int`, `Real`, `BitVector`, `Array(`T_1`,` T_2`)`
  - Variablen, Relationssymbole und Funktionssymbole bekommen neben der Stelligkeit noch eine Typ-Signatur
    - z.B. `+: Int x Int -> Int`
      `read: Array(Int, Real) x Int -> Real`
  - Dabei sind auch Sorten-Konstruktoren (wie z.B. `Array`) möglich
    - Polymorphe Typen
  - Terme und Formeln müssen dann Typ-konform sein
  - Notation: „t : T“ steht für „Term t besitzt Typ T“

SMT-LIB

- Definiert Standard-Format für SMT-Formeln und Befehle für SMT-Solver
- Aktuelle Version: SMT-LIB 2.6 (`http://smtlib.cs.uiowa.edu`)



SMT-LIB

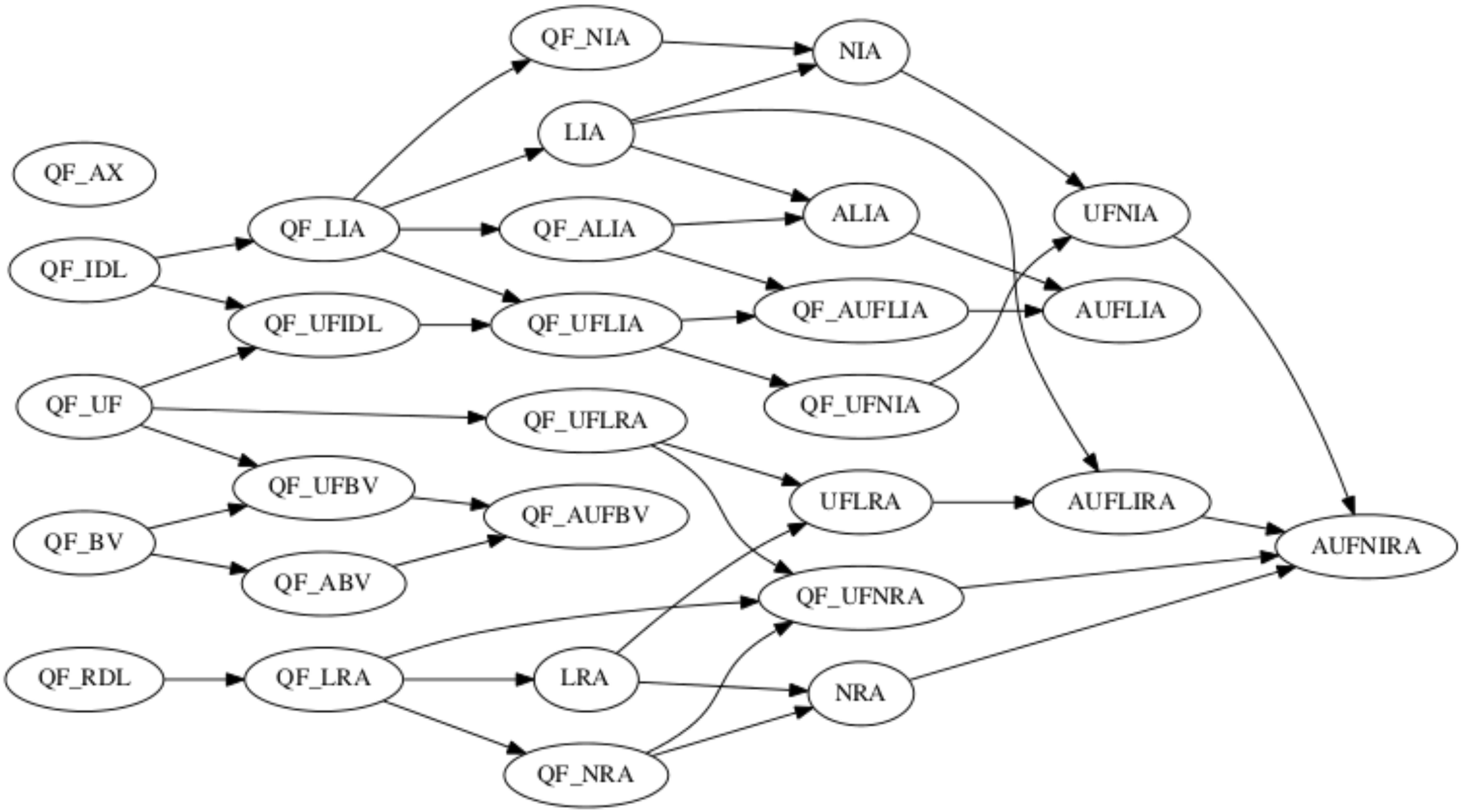
- **SMT-LIB definiert:**
  - **Syntax für SMT-Formeln**
    - Lisp-ähnlich
  - **Logiken**
    - Entsprechen unseren Theorie-Fragmenten
    - z.B. QF_LIA für die quantorenfreie Logik der linearen ganzzahligen Arithmetik
  - **Theorien**
    - Entsprechen grob unserer Definition von Theorien, mehrsortige Logik
  - **Kommandos für SMT-Solver**, z.B.:

```
(set-logic QF_LIA)
(check-sat)
(get-model)
```

SMT-LIB: QF_LIA Beispiel

```
(set-option :produce-models true)
(set-logic QF_LIA)
(declare-const x1 Int)
(declare-const x2 Int)
(declare-const x3 Int)
(declare-const x4 Int)
(declare-const x5 Int)
(declare-const x6 Int)
(declare-const x7 Int)
(declare-const x8 Int)
(declare-const x9 Int)
(declare-const x10 Int)
(assert
    (and
        (= (+ (* -68 x6) (* 31 x7) (* 44 x8)) -3793)
        (= (+ (* -28 x1) (* -20 x3) (* 20 x4) (* -63 x6) (* -72 x8) (* 75 x9) (* 77 x10))
           -13264)
        (= (+ (* -67 x7) (* -63 x9) (* -30 x10)) 4340)
        (= (+ (* 48 x2) (* 40 x8) (* -52 x10)) -2940)
        (= (+ (* 59 x1) (* -53 x2) (* -72 x4) (* 72 x5) (* -26 x6) (* -97 x7) (* 50 x8)
              (* 22 x9) (* -73 x10))
           557)
))
(check-sat)
(get-model)
```

SMT-LIB: Logics



A → B bedeutet, dass jede Formel von A auch eine Formeln von B ist