Karlsruhe Institute of Technology

Entscheidungsverfahren mit Anwendungen in der Softwareverifikation

V: Einführung SMT

Carsten Sinz
Institut für Theoretische Informatik

14.11.2018

Inhalt

- Abstraktes DPLL
- Von SAT zu SMT

Abstraktes DPLL

- **Regel-basierte Formulierung von DPLL**
  - sauber
  - einfach
  - flexibel
- **Zustände:**
  - `Fail`
  - M ‖ F
    - F: Aussagenlogische Formel in CNF
    - M: Liste von Literalen
  - M wird als partielle Zuweisung M : Var(F) ⟶ { 0, 1 } interpretiert
- **Regeln:**
  - M ‖ F ⟹ M’ ‖ F’ oder M ‖ F ⟹ `Fail`

Inferenzregeln 1

- **UnitPropagate:**

$$M \parallel F, C \vee l \implies Ml \parallel F, C \vee l \quad \text{falls} \begin{cases} M \models \neg C \\ l \text{ undefiniert in } M \end{cases}$$

- **Decide:**

$$M \parallel F \implies Ml^d \parallel F \quad \text{falls} \begin{cases} l \text{ oder } \neg l \text{ kommt in } F \text{ vor} \\ l \text{ undefiniert in } M \end{cases}$$

Inferenzregeln 2

- **Backtrack:**

$$Ml^d N \parallel F, C \implies M \neg l \parallel F, C \quad \text{falls} \begin{cases} Ml^d N \models \neg C \\ N \text{ enthält kein Literal} \\ \text{der Form } k^d \end{cases}$$

- **Fail:**

$$M \parallel F, C \implies \textsf{Fail} \quad \text{falls} \begin{cases} M \models \neg C \\ M \text{ enthält kein Literal der Form } l^d \end{cases}$$

Beispiel

$$\varnothing \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{Decide}$$

$$A^d \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{UnitProp}$$

$$A^d, \neg B \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow 2 \times \text{UnitProp}$$

$$A^d, \neg B, C, D \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{Backtrack}$$

$$\neg A \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{UnitProp}$$

$$\neg A, D \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{Decide}$$

$$\neg A, D, \neg C^d \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \Longrightarrow \text{UnitProp}$$

$$\neg A, D, \neg C^d, B \parallel \neg A \vee \neg B,\ B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ B \vee \neg C \vee \neg D,\ A \vee D \quad \not\Longrightarrow$$

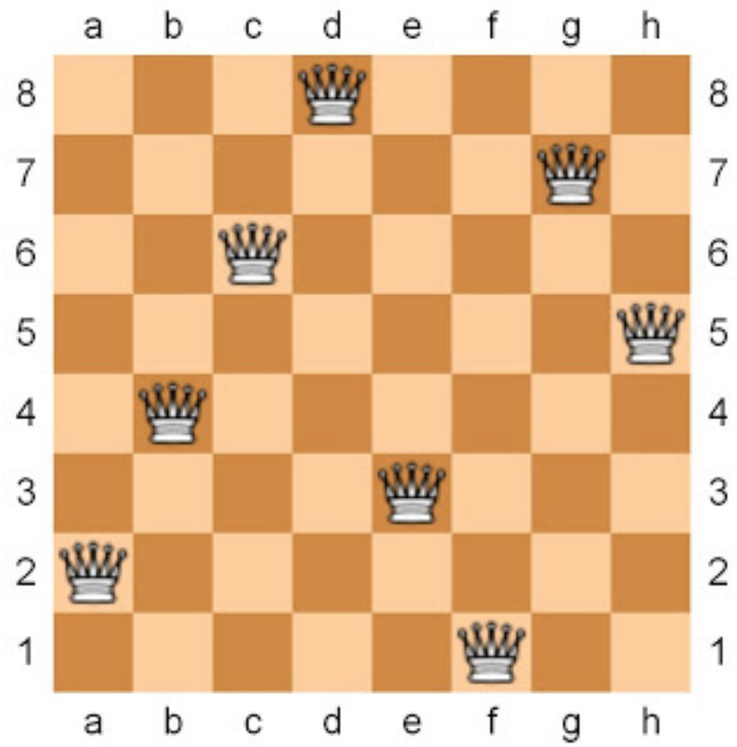
- **Ergebnis:** A = C = 0, B = D = 1 ist ein Modell der Formel

Eigenschaften

- **Satz:**
  Alle Ableitungen $\varnothing \parallel F \implies S_1 \implies \ldots$ sind endlich.

- **Satz:**
  Sei $\varnothing \parallel F \implies S_1 \implies \ldots \implies S$ eine maximale Ableitung. Dann gilt:
  - F ist unerfüllbar gdw. s = `Fail`
  - Falls S die Form M ∥ F hat, dann ist M ein Modell von F

Das n-Damen Problem



Platziere n Damen so auf einem $n \times n$-Schachbrett dass keine Dame eine andere Dame schlagen kann

Lösung mittels Logik

- Führe eine 0/1-Variable pro Feld ein

$$\begin{matrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & \cdots & X_{N,N} \end{matrix}$$

- Genau eine Dame pro Zeile/Spalte:

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1,j} = 1 \wedge \ldots \wedge \sum_{j=1}^{N} X_{N,j} = 1 \wedge \sum_{i=1}^{N} X_{i,1} = 1 \wedge \ldots \wedge \sum_{i=1}^{N} X_{i,N} = 1$$

- Höchstens eine Dame pro Diagonale:

$$\begin{aligned} X_{1,1} + X_{2,2} + \ldots + X_{N,N} &\leq 1 \\ X_{1,2} + X_{2,3} + \ldots + X_{N-1,N} &\leq 1 \\ X_{1,3} + X_{2,4} + \ldots + X_{N-2,N} &\leq 1 \end{aligned}$$

Ist das SAT?

- Logik benutzt Schreibweisen aus der **Arithmetik**
- Diese müssen nach SAT **kodiert** werden
- $\sum_{j=1}^{N} X_{1,j} = 1$ kann kodiert werden als

  $(X_{1,1} \vee \ldots \vee X_{1,N}) \wedge \neg(X_{1,1} \wedge X_{1,2}) \wedge \neg(X_{1,1} \wedge X_{1,3}) \wedge \ldots \wedge \neg(X_{1,N-1} \wedge X_{1,N})$

- $\sum_{j=1}^{N} X_{1,j} \leq 1$ kann kodiert werden als

  $\neg(X_{1,1} \wedge X_{1,2}) \wedge \neg(X_{1,1} \wedge X_{1,3}) \wedge \ldots \wedge \neg(X_{1,N-1} \wedge X_{1,N})$

- **Beobachtung:**
  Aussagenlogik ist wie Maschinensprache!

SMT

- **Wunsch:** Logik, die Arithmetik beherrscht
- n-Damen Problem benötigt dann (fast) keine weitere Kodierung
  - $X_{i,j} = 0 \vee X_{i,j} = 1$ für alle $X_{i,j}$
- **Wunsch:** Unterstützung weiterer eingebauter Datentypen
- **Lösung:** Benutze SMT! (Satisfiability Modulo Theories)
- **Beobachtung:** SMT ist wie Haskell / OCaml / Scala / Swift / …